CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE AGRICOLE **C A P E S A**

SESSION 2011

Concours : EXTERNE
Section : **MATHEMATIQUES**

DEUXIEME EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

Etude de thèmes

(Coefficient 2 : - Durée : 5 heures)

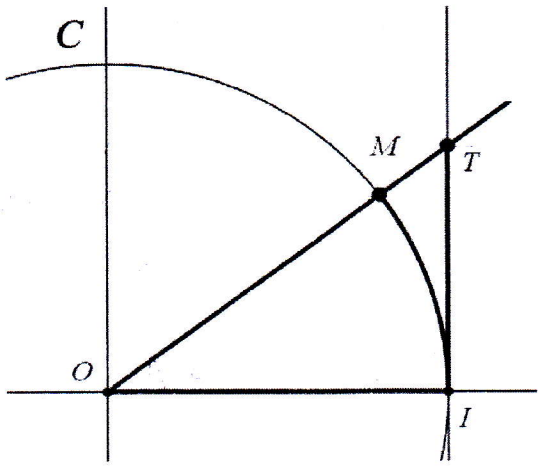
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des calculatrices de poche est autorisé, à condition qu'elles soient à fonctionnement autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

Le sujet comporte cinq pages.
Il est composé de deux exercices indépendants l'un de l'autre.

Exercice 1

Partie I

1. Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormal direct d'origine O, C désigne le cercle trigonométrique de centre O et d'origine I.
   M désigne le point d'abscisse curviligne x où x est un réel appartenant à l'intervalle $]0;\frac{\pi}{2}[$.
   T est le point d'intersection de la demi droite $[OM)$ avec la tangente à C issue du point I.



   (a) En comparant les aires de trois domaines plans, démontrer que :

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x).$$

   (b) En déduire la limite de $\dfrac{\sin(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0.

2. On considère la fonction g définie sur $I = [0;\frac{\pi}{2}]$ par :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si} \quad x \in]0;\frac{\pi}{2}] \end{cases}.$$

   (a) Dresser le tableau des variations de g sur I.
   Indication : on pourra être amené à étudier les variations de la fonction h définie sur I par $h(x) = x\cos(x) - \sin(x)$.

   (b) En déduire un encadrement de la fonction $\dfrac{1}{g}$ sur I.

3. On considère la fonction Φ définie sur $[0;\pi]$ par :

$$\Phi(t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad t = 0 \\ \dfrac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si} \quad t \in]0;\pi] \end{cases}.$$

   (a) Vérifier que Φ est continue en 0.

   (b) Démontrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0;\pi]$, on a : $-\dfrac{\pi}{2} \leq \Phi(t) \leq -\dfrac{1}{2}$.

Partie II - Calcul de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

1. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on a : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

   (c) Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $A_k = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\, \mathrm{d}t$.
   Démontrer que $A_k = \frac{1}{k^2}$.

2. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ et pour tout réel $t \in [0;\pi]$, on pose : $D_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$

   où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

   (a) Démontrer que, pour tout réel t de l'intervalle $]0;\pi]$, $D_n(t) = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.
   Indication : on remarquera que $D_n(t)$ est une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

   (b) La fonction D_n est-elle continue en 0 ?

3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) \quad \text{puis que} \quad u_n = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) D_n(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

   (b) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose :

$$v_n = \int_0^{\pi} \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right] \Phi(t)\, \mathrm{d}t$$

   où Φ est la fonction introduite dans la partie I, dont on admettra qu'elle est de classe C^1 sur l'intervalle $[0;\pi]$.
   Démontrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

   (c) En déduire l'égalité : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2

Pour l'ensemble du problème, on se place dans un plan affine euclidien orienté.
Les mesures des angles sont exprimées en radians.

Partie I - Préliminaires

On rappelle que des points M, N, P, Q non alignés et distincts deux à deux appartiennent à un même cercle si et seulement si $\left(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}\right) = \left(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NQ}\right)$, modulo π.

Soit un triangle IJK équilatéral. On suppose les points I, J et K non confondus.
Soit (Γ) le cercle circonscrit au triangle IJK et $\overset{\frown}{IJ}$ l'arc du cercle (Γ) d'extrémités I et J incluses, ne contenant pas le point K.
Soit M un point quelconque du plan.
Soit r_I la rotation de centre I telle que $K = r_I(J)$.
Soit $M_1 = r_I(M)$.

1. (a) Démontrer que $MI + MJ = MM_1 + M_1K$.
   (b) En déduire que $MI + MJ \geq MK$.
2. (a) Démontrer que $MI + MJ = MK$ si et seulement si M_1 appartient au segment $[MK]$.
   (b) Démontrer que $MI + MJ = MK$ si et seulement si M appartient à l'arc de cercle $\overset{\frown}{IJ}$.

Partie II

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Le point de coordonnées (x, y) est caractérisé par son affixe, le nombre complexe $z = x + iy$.
Soient a, b, c trois nombres strictement positifs et A, B, C les points du plan d'affixes respectives : $-a$, b et ic.
On suppose que la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$ appartient à l'intervalle $\left]0; \frac{2\pi}{3}\right[$.
Soit j le nombre complexe $j = \exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)$.
Soient A', B', C' les points du plan d'affixes respectives :

$$ic + \exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)(b - ic), \quad -a + \exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)(ic + a), \quad b + \exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)(-a - b).$$

$\omega, \omega', \omega''$ désignent les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$.

1. (a) Déterminer la nature des trois triangles CBA', ACB' et BAC'.
   (b) Construire une figure et tracer les trois droites (AA'), (BB'), (CC').
2. (a) Calculer $1 + j + j^2$.
   (b) Démontrer que $\omega = a - j^2\, b - j\, i\, c$.
   (c) Démontrer que $\omega' = j\omega$ et $\omega'' = j^2\, \omega$.
   (d) Justifier que les droites (AA') et (BB') sont sécantes.
   (e) Vérifier que $\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}\right) = \frac{2\pi}{3}$, modulo 2π, puis que $AA' = BB' = CC'$.

3. (a) Démontrer que toute droite passant par un point M_0 d'affixe z_0 admet une équation complexe de la forme $u(\bar{z} - \bar{z}_0) - \bar{u}(z - z_0) = 0$, où z est l'affixe d'un point quelconque de la droite et u l'affixe d'un vecteur directeur.

   (b) Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') admettent pour équations respectives :

$$\omega(\bar{z} + a) - \bar{\omega}(z + a) = 0$$

$$\omega j(\bar{z} - b) - \bar{\omega} j^2(z - b) = 0$$

$$\omega j^2(\bar{z} + ic) - \bar{\omega} j(z - ic) = 0$$

   (c) Démontrer que les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point F. L'affixe du point F n'est pas demandée.

Partie III

On admet que le point F est situé à l'intérieur du triangle ABC.

1. (a) Démontrer que $\left(\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FA'}\right) = \frac{\pi}{3}$, modulo 2π.

   (b) En déduire que le point F appartient au cercle circonscrit au triangle CBA'.

Dans la suite, on pourra utiliser les résultats établis dans les préliminaires.

2. Soit f l'application définie pour tout point M du plan par $f(M) = MA + MB + MC$.

   (a) Démontrer que $f(F) = AA'$.

   (b) Démontrer que, pour tout point M du plan, $f(M) \geq AA'$, puis que si M n'appartient pas à la droite (AA') alors $f(M) > AA'$.

   (c) En déduire que, pour tout point M du plan, distinct de F, $f(M) > AA'$.

3. Démontrer que f admet un minimum, atteint en un seul point du plan.